

Topologia I/I*, Egzamin (część teoretyczna, drugi termin)

2025-02-17 18

Rozwiązania zadań części teoretycznej nie muszą być napisane na oddzielnych kartkach. Każdą kartkę prosimy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia.

Zadanie 1 (8 p.).

Podaj definicję przestrzeni topologicznej.

1. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, a $\sim$ relacją równoważności na X . Podaj definicję topologii ilorazowej na $X/\sim$
2. Podaj definicję homeomorfizmu pomiędzy przestrzeniami topologicznymi.
3. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi, a $f: X \rightarrow Y$ ciągłą surjekcją taką, że dla $U \in \mathcal{T}_X$ zachodzi $f(U) \in \mathcal{T}_Y$. Wykaż, że przestrzenie $X/\sim$ i Y są homeomorficzne.

Zadanie 2 (6 p.).

1. Podaj definicję przestrzeni topologicznej spójnej.
2. Podaj, wraz z krótkim uzasadnieniem, przykład (nieskończonej) przeliczalnej przestrzeni topologicznej spójnej.
3. Niech A i B będą spójnymi podprzestrzeniami przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ takimi, że $A \cap B \neq \emptyset$. Wykaż, że $A \cup B$ jest spójna.

Zadanie 3 (6 p.).

1. Podaj definicję ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej oraz definicję przestrzeni metrycznej zupełnej.
2. Wykaż, że podprzestrzeń domknięta przestrzeni metrycznej zupełnej jest zupełna.
3. Podaj, wraz z krótkim uzasadnieniem, przykład przestrzeni metrycznej, która nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

Topologia I/I*, Egzamin (drugi termin)

2025-02-18

Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę prosimy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. We wszystkich rozwiązaniach należy podać uzasadnienie.

Zadanie 1 (10 p.). Niech $X = [0, 2] \times \{0, 1\}$ z topologią euklidesową oraz

$$A = \{(1, 0), (1, 1)\}, \quad B = (0, 2) \times \{0\}, \quad C = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

1. Sprawdź, czy X/A jest przestrzenią Hausdorffa.
2. Sprawdź, czy X/B jest przestrzenią Hausdorffa.
3. Sprawdź, czy X/A i X/C są homeomorficzne.

Zadanie 2 (10 p.). Niech $A \subseteq (0, \infty)$ będzie przeliczalny, a $C \subseteq \mathbb{R}$ domknięty i brzegowy (w topologii euklidesowej). Wykaż, że na prostej $X = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ istnieje punkt, który nie leży na żadnej z prostych

$$L_{a,c} = \{(x, ax + c) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

dla $a \in A$ i $c \in C$.

Zadanie 3 (10 p.). Niech $A_n = [0, 1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}$ oraz

$$X = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

z topologią euklidesową.

1. Wykaż, że X jest spójna.
2. Wykaż, że $\overline{X}$ (domknięcie w $\mathbb{R}^2$) nie jest ściągalne.

Zadanie 4 (10 p.).

1. Udowodnij, że jeśli X i Y są przestrzeniami spójnymi mocy większej niż 1, to dla dowolnego $(x, y) \in X \times Y$, przestrzeń $(X \times Y) \setminus \{(x, y)\}$ jest spójna.
2. Udowodnij, że nie istnieje przestrzeń X taka, że prosta euklidesowa jest homeomorficzna z iloczynem $X \times X$.